2.3. Partielle Ableitungen

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein beliebiger (aber fester) Punkt aus $\mathring{D}$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Def: Die partielle Ableitung von f nach $\underbrace{x_i}_{\text{als Variable aufzufassen}}$ im Punkte x wird definiert (falls existent) durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h}$$

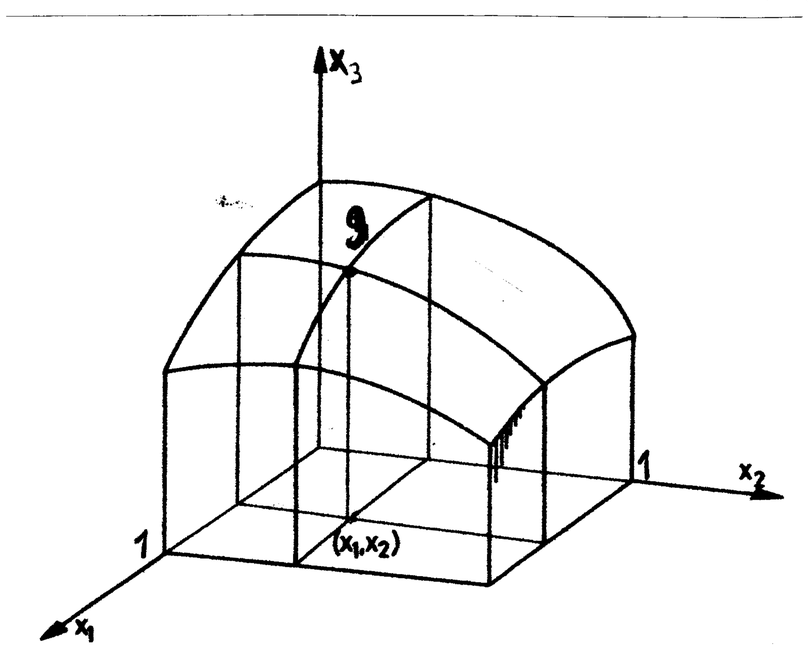
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \qquad \Big[e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0) \Big]$$

$$= g'(x_i), \text{ wobei } g(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

[$x \in \mathring{D} \Rightarrow g$ definiert in $]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$ für $\varepsilon > 0$ klein genug]

Veranschaulichung für $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = g'(x_1)$, wobei $g(t) := f(t, x_2)$.



Bem: i) Da $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'(x_i)$ (s. oben) gelten für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ analoge Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Ableitungen.

ii) Für Funktionen von 2 oder 3 Variablen schreibt man oft $f(x,y)$ oder $f(x,y,z)$ (statt $f(x_1, x_2)$ oder $f(x_1, x_2, x_3)$).

Beispiele: 1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2y^2 - 3x\sin y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x + 0 - 3\sin y = 2x e^{x^2+y^2} - 3\sin y.$$

y als Konstante behandeln und nach x ableiten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y + 4y - 3x\cos y.$$

x als Konstante behandeln und nach y ableiten

2) $f: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z^2 \sin(x^2+y^2) + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z^2\cos(x^2+y^2)\cdot 2x + \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = 2xz^2\cos(x^2+y^2) + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

y, z als Konstanten behandeln und nach x ableiten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^2\cos(x^2+y^2)\,2y + \left(\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = 2yz^2\cos(x^2+y^2) - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\cdot\sin(x^2+y^2) + 0 = 2z\sin(x^2+y^2).$$

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, U offen, $x \in U$.

a) f heißt partiell differenzierbar in x falls $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existiert für $i = 1, 2, \dots, n$.

b) f heißt partiell differenzierbar falls f partiell diff. in x für alle $x \in U$ ist.

c) f heißt stetig partiell differenzierbar falls f partiell diff. und alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ stetig sind

d) Falls f partiell diff. in x ist heißt $(\operatorname{grad} f)(x) :=$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ der Gradient von f im Punkte x.

Satz 2.3.1: (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff. in $x \in \mathring{D}$.

Besitzt f in x ein lokales Extremum, so gilt $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

Beweis: Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ und $g(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $t \in]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$.

f hat ein lokales Extremum in $x \Rightarrow g$ hat ein lokales Extremum in $x_i \overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow} g'(x_i) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'(x_i) = 0$. Also $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$. $\square$

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit U offen und f partiell diff.

$x \in U$ heißt <u>kritischer Punkt von f</u> falls $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8xe^{-x^2-4y^2} + (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}(-2x) = 2xe^{-x^2-4y^2}(4-(4x^2+y^2)).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{-x^2-4y^2} + (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}(-8y) = 2ye^{-x^2-4y^2}(1-4(4x^2+y^2)).$$

Daraus folgt $(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(4-(4x^2+y^2)) = 0 & (1) \\ y(1-4(4x^2+y^2)) = 0. & (2) \end{cases}$

Fall 1: $x \neq 0$. $(1) \Rightarrow 4x^2+y^2 = 4 \Rightarrow 4x^2+y^2 \neq 1/4 \Rightarrow 1-4(4x^2+y^2) \neq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow}$ $y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 4-4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Für $x \neq 0$ haben wir die kritischen Punkte $(-1,0)$ und $(1,0)$.

Fall 2: $x = 0$. $(2) \Leftrightarrow y(1-4y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $y = \pm 1/2$.

Insgesamt hat f 5 kritische Punkte:

$(-1,0)$; $(1,0)$; $(0,0)$; $(0,\frac{1}{2})$; $(0,-\frac{1}{2})$.

Def: (partielle Ableitungen 2. Ordnung)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff. ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen)

a) f heißt 2-mal partiell diff. falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ wieder partiell diff sind.

Notation: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ $(1 \leq i, j \leq n)$.

b) f heißt 2-mal stetig partiell diff wenn f 2-mal partiell diff und alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ stetig sind.

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 \sin(x+y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\sin(x+y) + 2x\cos(x+y) + 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)$$
$$= (2-x^2)\sin(x+y) + 4x\cos(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2(-\sin(x+y)) = -x^2\sin(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y).$$

Mithilfe des MWS (Ana I) kann man zeigen:

Satz 2.3.2: (H.A. Schwarz)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell diff. (U offen)

Dann gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\square$

2.4. Totale Differenzierbarkeit

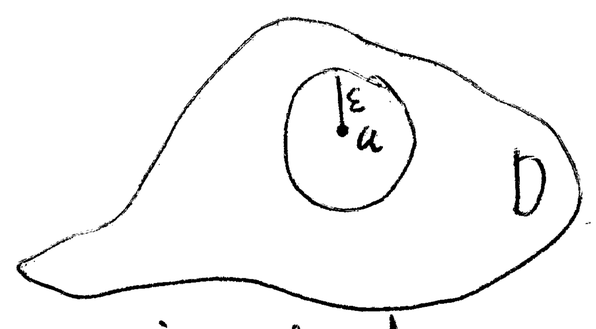
Zur Erinnerung: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

f heißt diff. in a falls $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert. (1)

Diese Def. lässt sich nicht für Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ übertragen, denn $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ist sinnlos [$f(a+h)-f(a)$ kann nicht mit dem Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ dividiert werden]

Es lässt sich leicht zeigen (s. Üb.), dass (1) zu (2) äquivalent ist:

(2): $\exists m \in \mathbb{R}$ sodass $f(a+h) = f(a) + mh + \underbrace{r(h)}_{\text{Rest}}$, wobei $r(h) := f(a+h) - f(a) - mh$ erfüllt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.



Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathring{D}$.

- f heißt (total) differenzierbar in a falls es eine Matrix $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, sodass

Vektoren als Spaltenvektoren auffassen

$$f(a+h) \overset{\swarrow}{=} f(a) + \underbrace{Bh}_{\text{Matrixprodukt}} + \underbrace{r(h)}_{\text{Rest}} \quad \forall h \in U_\varepsilon(0) \text{ und } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

affin-linear in h

- f heißt diff falls $D = \mathring{D}$ und f in jedem Punkt $a \in D$ diff. ist.

Bem: Seien f_i $(1 \le i \le m)$ die Komponenten von f: $f = (f_1, \dots, f_m)$.
Aus der Def. folgt leicht: f ist diff. in $a \Leftrightarrow f_i$ ist diff. in a $\forall i \le m$.

Satz 2.4.1: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ diff. in $a \in \mathring{D}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sodass $f(a+h) = f(a) + Bh + r(h)$ $\forall h \in U_\varepsilon(0)$ und $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Dann:

a) f ist stetig in a.

b) Alle Komponenten $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ sind in a partiell diff. und es gilt $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = b_{ij}$ $\forall j \leq n$.

Beweis:

a) $f(a+h) = f(a) + Bh + r(h)$ $\forall h \in U_\varepsilon(0)$. $\lim\limits_{h \to 0} Bh = 0$ und $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = \lim\limits_{h \to 0} \|h\| \cdot \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \cdot 0 = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) + 0 + 0 = f(a).$$

b) Seien $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $r = (r_1, \dots, r_m)$.

$f(a+h) = f(a) + Bh + r(h) \Rightarrow f_i(a+h) = f_i(a) + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} h_j + r_i(h)$ $\forall h \in U_\varepsilon(0)$ $\forall i \leq m$.

Setze $h = te_j$ $(t \in \mathbb{R})$. $f_i(a+te_j) = f_i(a) + t b_{ij} + r_i(te_j) \Rightarrow$

$\frac{f_i(a+te_j) - f_i(a)}{t} = b_{ij} + \frac{1}{t} r_i(te_j)$. Also $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f_i(a+te_j) - f_i(a)}{t} =$

$\lim\limits_{t \to 0} \left(b_{ij} + \frac{r_i(te_j)}{t} \right) = b_{ij}$ denn $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r_i(h)}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \frac{r_i(te_j)}{t} = 0$. $\square$

Konsequenz: Die Matrix B in der Def. der Differenzierbarkeit ist eindeutig bestimmt und $B = (b_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

B heißt Differential oder Jacobi-Matrix von f im Punkt a.

Schreibweise:

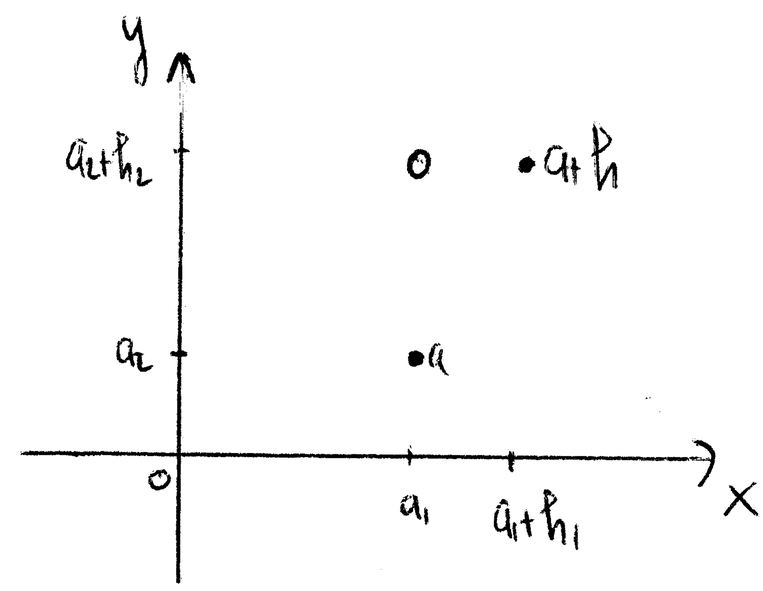
$$(Df)(a) = J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Spezialfälle: $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in \mathring{D}$.

i) $m = 1$. $(Df)(a) = (\operatorname{grad} f)(a)$.

ii) $n = 1$. $(Df)(a) = (f_1'(a), \dots, f_m'(a))^T$.

Satz 2.4.2: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff. und $a \in U$ offen. Alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ seien im Punkt a stetig. Dann ist f diff. in a.



Beweis: Für $n = 2$.

z.z: $f(a+h) - f(a) = \overbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)}^{(\operatorname{grad} f)(a)\cdot h} + r(h)$

mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \overset{\text{MWS, Ana I}}{=}$$

$$(a_1+h_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) + (a_2+h_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) \quad \left(\text{für gewisse } 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1\right)$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) =$$

$$h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) + \underbrace{h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\right) + h_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\right)}_{r(h)},$$

und $\frac{r(h)}{\|h\|} = \frac{h_1}{\|h\|}(\quad) + \frac{h_2}{\|h\|}(\quad) \to 0 \ (h \to 0)$ denn $\frac{h_1}{\|h\|}$ und $\frac{h_2}{\|h\|}$

sind beschränkt und $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sind stetig in a. $\square$

<u>Korollar:</u> Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit U offen.

f stetig partiell diff $\Rightarrow$ f diff. $\Rightarrow$ f partiell diff. und stetig.

Umkehrungen sind falsch. $\square$

<u>Satz 2.4.3:</u> (Kettenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $a \in U$ und $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \overset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cup\!\!\shortmid}{V}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$.

Seien f diff in a und g diff. in $f(a)$.

Dann ist $g \circ f$ diff. in a und $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$. Matrixprodukt

<u>Beweis:</u> Laut Voraussetzung gilt

$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + r(h)$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ und

$g(f(a)+k) = g(f(a)) + Dg(f(a))k + \tilde{r}(k)$ mit $\lim\limits_{k \to 0} \frac{\tilde{r}(k)}{\|k\|} = 0$.

Daraus folgt $(g \circ f)(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + \underbrace{Df(a)h + r(h)}_{\overset{\shortparallel}{k}}) =$

$g(f(a)) + Dg(f(a)) \cdot (Df(a)h + r(h)) + \tilde{r}(Df(a)h + r(h)) =$

$(g \circ f)(a) + Dg(f(a))Df(a)h + \underbrace{Dg(f(a))r(h) + \tilde{r}(Df(a)h + r(h))}_{\tilde{\tilde{r}}(h)} \quad \forall h \in U_\varepsilon(0)$.

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\tilde{\tilde{r}}(h)}{\|h\|} = 0$. Also ist $g \circ f$ diff. in a und $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$. $\square$

<u>Korollar 2.4.4:</u> Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{R} \supseteq I \xrightarrow{c} \overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cup\!\!\shortmid}{U}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

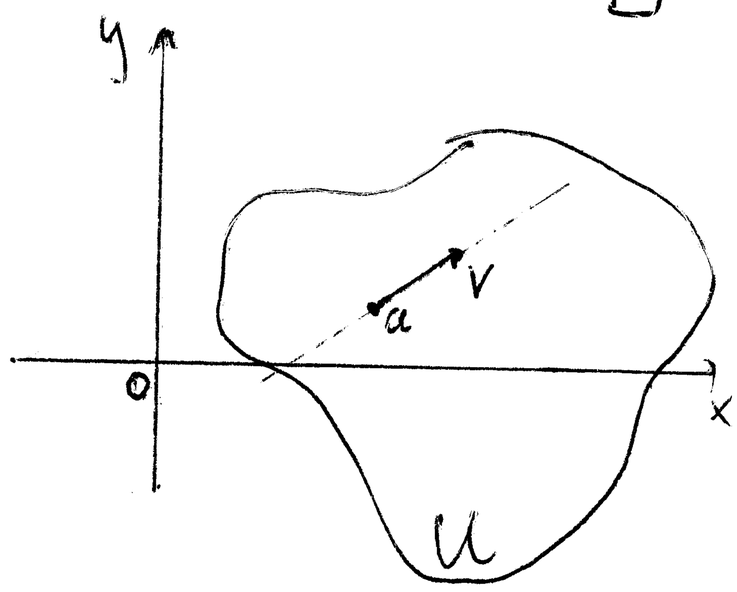
Seien f und c differenzierbar, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$.
Dann ist $f \circ c$ diff. und $(f \circ c)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t)) \cdot c_i'(t) \quad \forall t \in I$.

<u>Beweis</u>: $Dc(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t))^T$, $(Df)(c(t)) = (\operatorname{grad} f)(c(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c(t))\right)$. Daraus folgt $(f \circ c)'(t) = D(f \circ c)(t) \overset{2.4.3}{=} (Df)(c(t)) \cdot Dc(t)$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c(t))\right) \cdot (c_1'(t), \dots, c_n'(t))^T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t)) \cdot c_i'(t).$$

$\square$

<u>Def</u>: (Richtungsableitung)



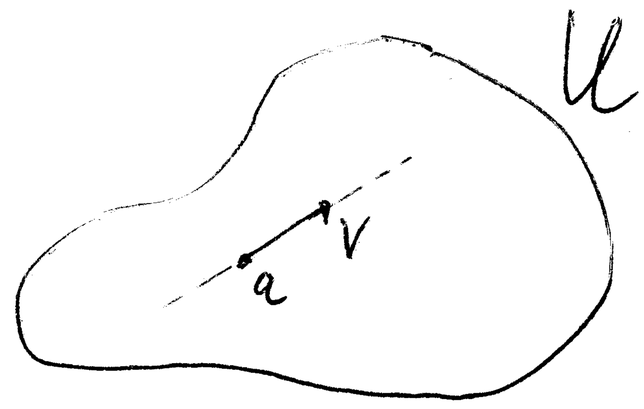
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor (d.h. $\|v\| = 1$)
Die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v wird definiert (falls existent) durch

$$D_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

<u>Bem</u>: $(D_{e_i} f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ für $i = 1, \dots, n$

<u>Satz 2.4.5</u>: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diff.
Seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$.
Dann existiert $D_v f(a)$ und es gilt $D_v f(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v \rangle$.

<u>Beweis</u>: Sei $c(t) := a + tv$, $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\to U$.
$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$, wobei $c_i(t) = a_i + tv_i \ \forall i \leq n$.



$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \frac{f(c(t))-f(c(0))}{t} = \frac{(f\circ c)(t)-(f\circ c)(0)}{t} \quad \forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[\setminus\{0\}.$$

Korollar 2.4.4 $\Rightarrow$ $f\circ c$ ist diff. in 0 und $(f\circ c)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(0))\, c_i'(0)$
$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v\rangle$. Also

$$(D_v f)(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(f\circ c)(t)-(f\circ c)(0)}{t} = (f\circ c)'(0) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v\rangle$$

$\square$

<u>Bem</u>: Ang. $(\operatorname{grad} f)(a) \neq 0$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.
Es gilt (1. Übung)

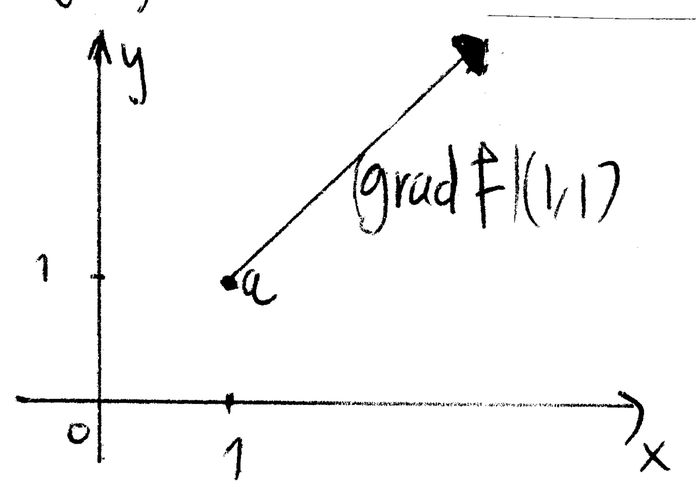
i) $|\langle (\operatorname{grad} f)(a), v\rangle| \leq \|(\operatorname{grad} f)(a)\| \cdot \|v\| = \|(\operatorname{grad} f)(a)\|$

ii) $|\langle (\operatorname{grad} f)(a), v\rangle| < \|(\operatorname{grad} f)(a)\| \cdot \|v\| = \|(\operatorname{grad} f)(a)\|$ wenn $(\operatorname{grad} f)(a)$ und v nicht kollinear sind, also $v \neq \pm \frac{(\operatorname{grad} f)(a)}{\|(\operatorname{grad} f)(a)\|}$.

Also ist $D_v f(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v\rangle$ maximal für $v = \frac{(\operatorname{grad} f)(a)}{\|(\operatorname{grad} f)(a)\|}$.

<u>Konsequenz</u>: Falls $(\operatorname{grad} f)(a) \neq 0$, dann gibt $(\operatorname{grad} f)(a)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt a an.
$(\operatorname{grad} f)(a)$ wird als <u>Pfeil</u> mit Anfangspunkt a gesehen.

<u>Beispiel</u>: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, $a = (1,1)$.
$(\operatorname{grad} f)(x,y) = (2x, 2y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$(\operatorname{grad} f)(a) = (2,2)$.



Def: (Niveaumenge, Niveaulinie)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diff., $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Die Niveaumengen von f sind alle Mengen der Form

$$N_f(\alpha) := \{x \in U \mid f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch Niveaulinien oder Höhenlinien.

Satz 2.4.6: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diff., $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann:

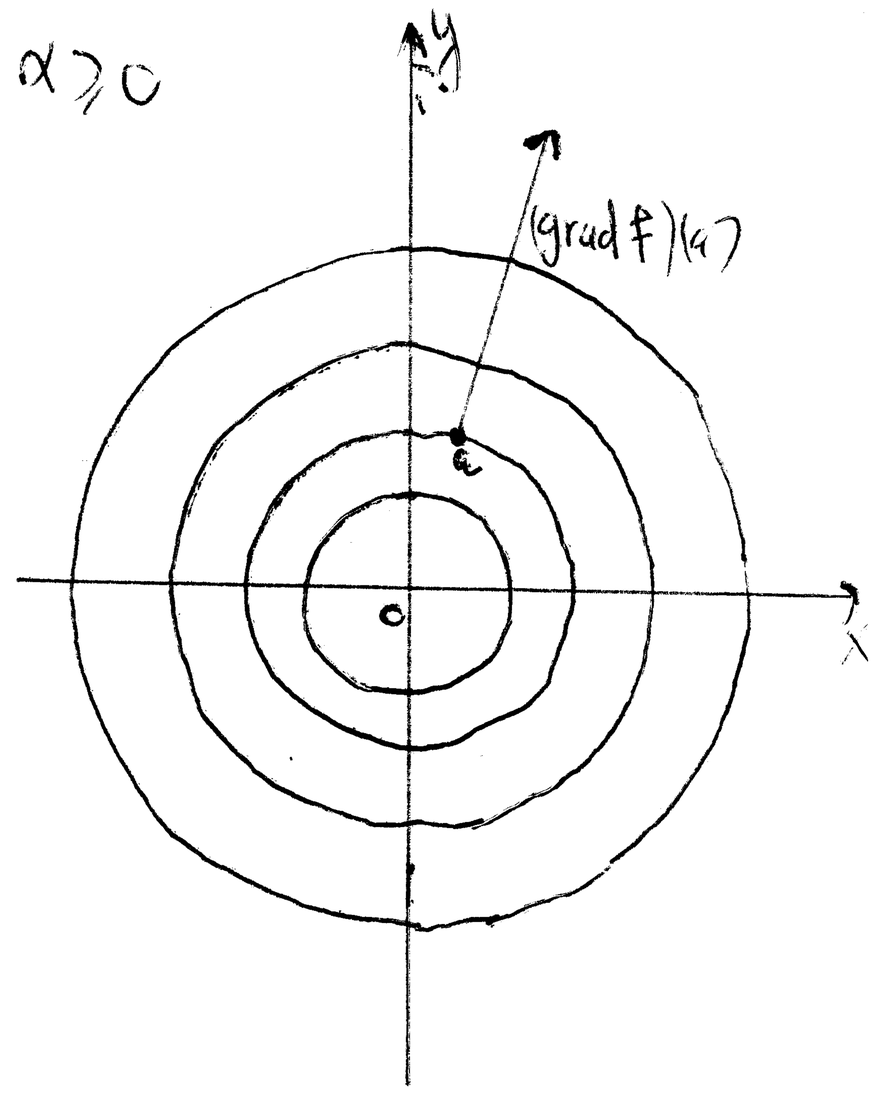
$$(\operatorname{grad} f)(a) \perp N_f(f(a)) \quad \forall a \in U \text{ mit } (\operatorname{grad} f)(a) \neq 0.$$

Beweis: S. Übung. $\square$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. $N_f(\alpha) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \alpha\}$

$$= \begin{cases} \text{Kreis mit Zentrum } (0,0) \text{ und Radius } \sqrt{\alpha}, & \text{wenn } \alpha \geq 0 \\ \emptyset & \text{wenn } \alpha < 0. \end{cases}$$

Die Höhenlinien von f sind alle Kreise des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(0,0)$.

$$(\operatorname{grad} f)(a) = 2a \quad \forall a \in \mathbb{R}^2.$$